Гімназія “Академія”

Алгебра і початки аналізу. 11 клас.

Тема уроку:

“ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ ТА ПОБУДОВА ЇЇ ГРАФІКА”

Розробив вчитель
математики
вищої категорії,
старший вчитель:
Деркач О.Р.

Київ - 2019

Алгебра і початку аналізу.
11 клас.

Тема уроку: Дослідження функції та побудова її графіка.

Мета уроку : Познайомити учнів з загальною схемою дослідження функцій. Формувати уміння учнів у дослідженні функцій та побудови їх графіків.

I. Перевірка домашнього завдання.
Зошити взяти на перевірку на початку уроку. На листочках учні виконують завдання з домашнього завдання, а 2 учні на дошці.

I варіант	II варіант
Знайти найбільше і найменше значення функції на вказаному проміжку	
$y = \sin 2x - x; [0; \pi]$ Відповідь: $\max\limits_{[0;\pi]} f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}; \min\limits_{[0;\pi]} f(x) = -\pi;$	$f(x) = e^{2x} + e^{-2x}; [-2;1]$ Відповідь: $\max\limits_{[-2;1]} f(x) = e^4 + e^{-4}; \min\limits_{[-2;1]} f(x) = 2$

Парна робота по перевірці виконання домашнього завдання.

II. Сприймання і усвідомлення загальної схеми дослідження функції і побудови її графіка.
Використання похідної значно полегшує задачу дослідження функції і побудову її графіка.

Алгоритм дослідженя функції.

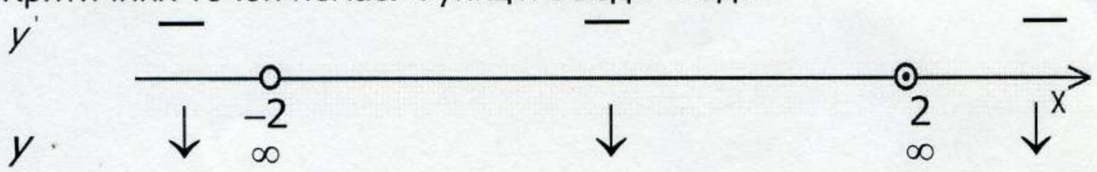
1. Знайти область визначення функції $D(x)$.
2. Перевіряємо функцію на періодичність, парність чи непарність.
3. Знаходимо точки перетину з осями координат.
4. Знаходимо похідну та стаціонарні точки.
5. Знаходимо проміжки зростання, спадання, точки екстремума та екстремальні значення функції.
6. Знаходимо $f''(x)$ і досліджуємо на опуклість.
7. З'ясовуємо поведінку функції на кінцях області визначення.
8. Знаходимо асимптоти функції.
9. Будуємо графік функції.
10. Визначаємо область значень функції $E(y)$

Приклад 1. Дослідити функцію $y = \dfrac{x}{x^2 - 4}$ і побудувати її графік.

Розв'язання.

1. $D(y): x \neq \pm 2;\ x \in (-\infty;-2) \cup (-2;2) \cup (2;+\infty).$
2. $f(x)$ – періодична.

   Оскільки $f(-x) = -\dfrac{x}{x^2 - 4}$; $f(-x) = -f(x)$ – функція непарна.
3. Перетин з віссю OX : $\begin{cases} x = 0; \\ y = 0; \end{cases}$, з віссю OY : $\begin{cases} y = 0; \\ x = 0; \end{cases}$
4. $f'(x) = \dfrac{x^2 - 4 - 2x^2}{(x^2 - 4)^2} = -\dfrac{x^2 + 4}{(x^2 - 4)^2}; f'(x) < 0.$
5. Критичних точок немає. Функція всюди спадає.



6. $$f''(x) = -\frac{2x(x^2-4)^2 - 2(x^2-4) * 2x(x^2+4)}{(x^2-4)^4} = -\frac{2x^3 - 8x - 4x^3 - 16x}{(x^2-4)^3} =$$
   $$= \frac{2x^3 + 24x}{(x^2-4)^3} = \frac{x(2x^2+24)}{(x^2-4)^3};$$
   $x(2x^2 + 24);\ x = 0$

7. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x^2 - 4} = +0$; $\qquad \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{x^2 - 4} = -0$
8. $x = 2$; та $x = -2$;– вертикальні асимптоти, т.як:

   $\lim\limits_{x\to 2+\ldots} \dfrac{x}{x^2 - 4} = +\infty \qquad \lim\limits_{x\to 2-\ldots} \dfrac{x}{x^2 - 4} = -\infty$

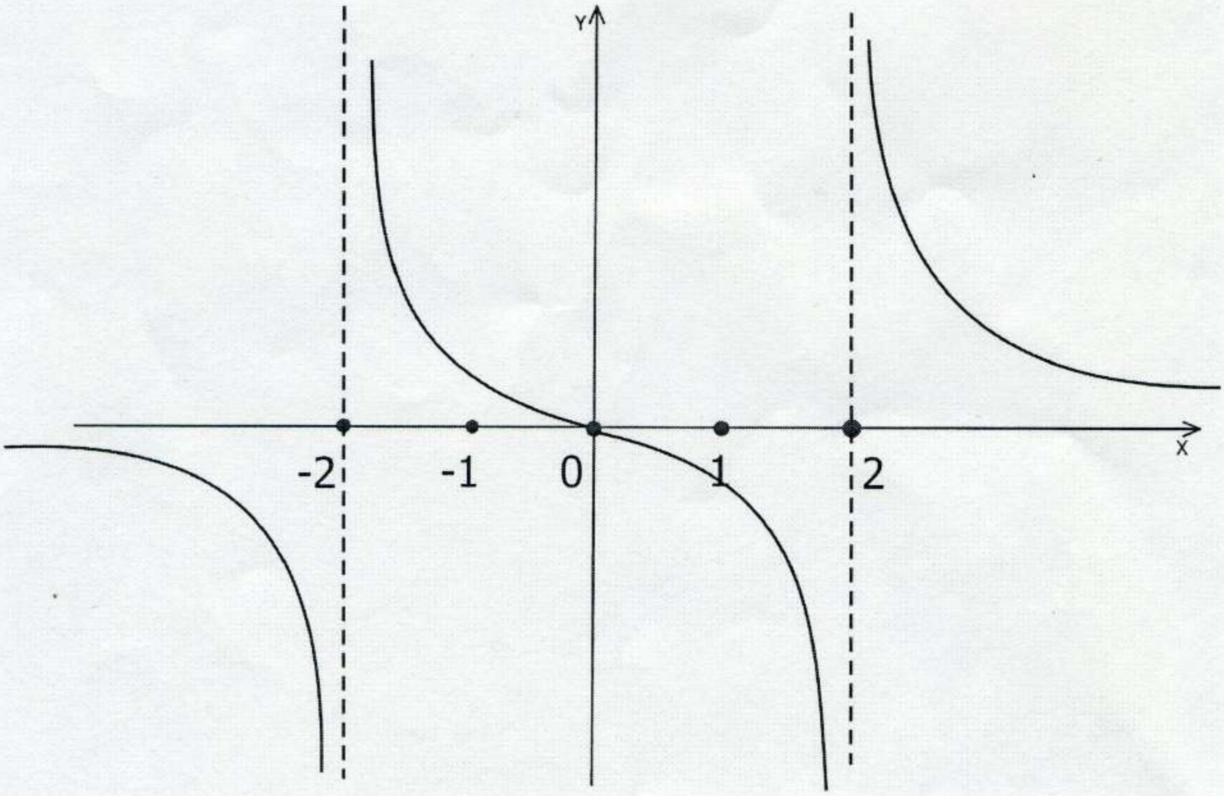
   $\lim\limits_{x\to -2+\ldots} \dfrac{x}{x^2 - 4} = +\infty \qquad \lim\limits_{x\to -2-\ldots} \dfrac{x}{x^2 - 4} = -\infty$

   Похила асимптота $y = kx + b$.

   Якщо в правій частині рівняння $y = f(x)$ можна виділити лінійну частину $y = f(x) = kx + b + \alpha(x)$ так, що $\alpha(x) \to 0$ коли $x \to \pm\infty$, то $y = kx + b$ – є асимптота $y = f(x)$.

   Так як $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x}{x^2 - 4} = 0$, то $y = 0$ – горизонтальна асимптота.

9. Будуємо графік функції: $y=\dfrac{x}{x^2-4}$;



10. $E(y)$: $y\in(-\infty;+\infty)$.

Приклад 2. Дослідити функцію $y=\dfrac{\ln x}{x}$ та побудувати графік.

Розв'язання.

1. $D(y)$: $x>0$.
2. Функція неперіодична, не парна ні ненепарна.
3. Точок з віссю OY не має. З віссю OX :
   $y=0;\ \ln x=0;\ x=1;\ M(1;0)$.
4. $y'=\dfrac{x+\dfrac{1}{x}-\ln x}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2};\ y'=0;\ \ln x=1;\ x=e.$
   $x=e$ – критична точка.
5.

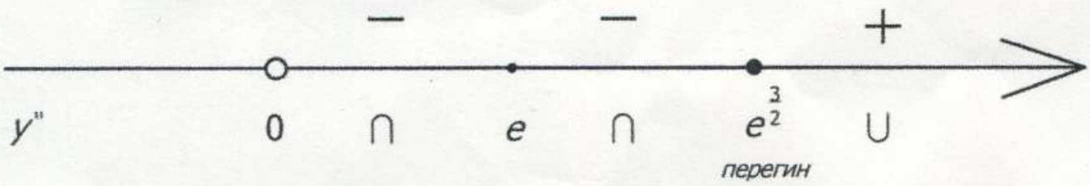
x	0		e	
$f'(x)$		$+$		$-$
$f(x)$		$\uparrow$	max	$\downarrow$

$x=e$;– точка максимуму.

$y_{\max}=y(e)=\dfrac{1}{e}$;

6. $f''(x) = \dfrac{(1-\ln x)' x^2 - (1-\ln x)(x^2)'}{x^4} = \dfrac{-x - 2x + 2x\ln x}{x^4} = \dfrac{2\ln x - 3}{x^3}$;

$y''(x) = 0$; $\ln x = \dfrac{3}{2}$; $x = e^{\frac{3}{2}}$ – критична точка.



$x = e^{\frac{3}{2}}$ – точка перегину; $y\left(e^{\frac{3}{2}}\right) = \dfrac{3}{2e\sqrt{e}}$;

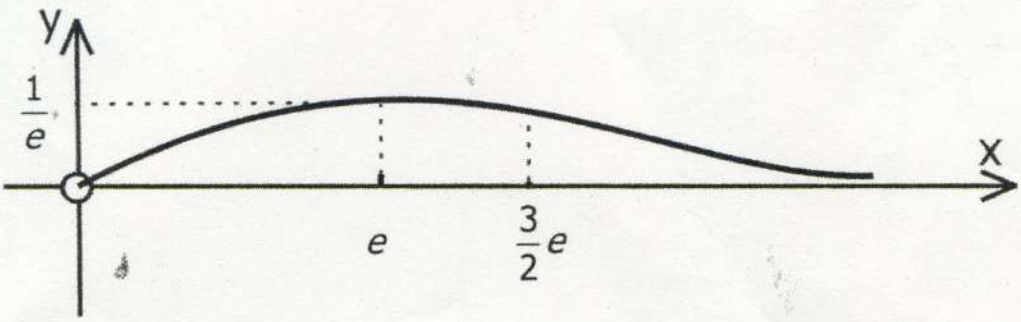
7. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0.$

8. $x = 0$ – вертикальна.

$k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{2x} = 0$

$y = 0$ – горизонтальна асимптота.

9. Будуємо графік функції:



10. $E(y)$; $y \in \left(0; \dfrac{1}{e}\right]$.

III. Підведення підсумків уроку.

IV. Домашнє завдання

Р. VIII § 5 №11: Вправа 5 (2; 4)